

# Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 6

Uni Bonn, SS 2023

**Aufgabe 21.** Beweise oder widerlege:

- (a) Die Abbildung  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto z^9 + 1$  lässt sich zu einer Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}$  erweitern.
- (b) Die Abbildung  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto z^9 + 1$  lässt sich zu einer Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  erweitern.

**Aufgabe 22.** Sei folgendes Diagramm ein Pushout von topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{u} & X \\ i \downarrow & & \downarrow f \\ D^{n+1} & \xrightarrow{v} & Y \end{array},$$

wobei  $i$  die Inklusion,  $n \geq 2$  und  $X$  wegweise zusammenhängend ist.

Beweise oder widerlege, dass  $Y$  wegweise zusammenhängend ist und  $f$  für jeden Grundpunkt  $x \in X$  einen Isomorphismus  $\pi_1(f, x): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$  induziert.

**Aufgabe 23.** Sind die Fundamentalgruppoiden von  $X$  und  $Y$  für folgende Räume äquivalent?

- (a)  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  und  $Y = S^1 \times D^3$ ;
- (b)  $X = S^1 \times S^1$  und  $Y = S^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$ ;
- (c)  $\mathbb{C}P^3 \times \mathbb{R}P^4$  and  $\mathbb{C}P^3 \amalg \mathbb{R}P^4$ .

**Aufgabe 24.** Konstruiere einen wegweise zusammenhängenden kompakten topologischen Raum, dessen Fundamentalgruppe isomorph zu  $\mathbb{Z}/2023$  ist.