Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 4

Uni Bonn, SS 2023

Aufgabe 13. Sei X ein kompakter und Y ein nicht-kompakter topologischer Raum. Beweise oder widerlege:

(a) X und Y können nicht homöomorph sein.

(b) X und Y können nicht homotopieäquivalent sein.

Aufgabe 14. Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Definiere ihren Abbildungszylinder $\mathrm{cyl}(f)$ durch das Pushout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \times [0,1] \arrow[r] & \mathrm{cyl}(f) \end{tikzcd}$$

wobei i die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist.

Zeige, dass die Abbildung $j\colon Y \to \mathrm{cyl}(f)$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 15. Betrachte das folgende kommutative Diagramm von topologischen Räumen

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "i_0"'] & X_1 \arrow[r, "j_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "i_2"'] \\ Y_0 \arrow[r, "k_1"'] & Y_1 \arrow[r, "k_2"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

Bezeichne L das linke Quadrat, R das rechte Quadrat, und A das aus L und R zusammengesetzte Quadrat, das man auch als das äußere Quadrat bezeichnen könnte. Seien L und R Pullbacks bzw. Pushouts.

Zeige oder widerlege, dass A ein Pullback bzw. Pushout ist.

Aufgabe 16. Gibt es einen topologischen Raum X, der nicht zusammenziehbar ist und für den jede Abbildung $S^n \to X$ für $n \geq 1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist?

Abgabe am 04.05. in der Vorlesung oder online