Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 11

Uni Bonn, SS 2023

Aufgabe 41. Sei X ein wegweise zusammenhängender, lokal wegweise zusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum, dessen Fundamentalgruppe isomorph zu $\langle a, b \mid a^5, b^3, aba^{-1}b^{-1} \rangle$ ist. Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X mit wegweise zusammenhängendem Totalraum.

Aufgabe 42. Beweise oder widerlege: Sei X ein wegweise zusammenhängender, lokal wegweise zusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ ist die universelle Überlagerung.

(b) Bis auf Isomorphie gibt es nur eine Überlagerung $p \colon \overline{X} \to X$ mit wegweise zusammenhängendem Totalraum $\overline{X}$.

(c) X ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 43. Sei X ein wegweise zusammenhängender, lokal wegweise zusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent? (Begründe die Antwort.)

(a) $\pi_1(X, x)$ ist für mindestens einen Grundpunkt $x \in X$ endlich;

(b) $\pi_1(X, x)$ ist für alle Grundpunkte $x \in X$ endlich;

(c) Es gibt bis auf punktierte Isomorphie nur endlich viele punktierte Überlagerungen $p \colon (\overline{X}, \overline{x}) \to (X, x)$ mit wegweise zusammenhängendem $\overline{X}$;

(d) Die universelle Überlagerung von X hat einen kompakten Totalraum.

Aufgabe 44. Klassifiziere bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $p \colon \overline{X} \to \mathbb{RP}^1 \vee D^1$, deren Totalraum $\overline{X}$ wegweise zusammenhängend ist. Dabei soll jeweils ein explizites Model konstruiert werden.

Abgabe am 29.06. in der Vorlesung oder online