

Übungen zur Einführung in die Geometrie und Topologie - Blatt 1

Uni Bonn, SS 2023

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise oder widerlege, dass die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, y)$ für alle $y \in X$ stetig ist.

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise oder widerlege, dass es eine Metrik \bar{d} auf X derart gibt, dass $\bar{d}(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in X$ gilt und (X, d) und (X, \bar{d}) homöomorph sind.

Aufgabe 3. Beweise oder widerlege, dass für jede Teilmenge A eines jeden topologischen Raumes X gilt:

- (a) $\overline{\text{int}(\bar{A})} = \bar{A}$,
- (b) $\text{int}(\overline{\text{int}(\bar{A})}) = \text{int}(\bar{A})$,
- (c) $\text{int}(\overline{\text{int}(A)}) = \text{int}(A)$,
- (d) $\overline{\text{int}(\overline{\text{int}(A)})} = \overline{\text{int}(A)}$,

wobei $\text{int}(A) = A^\circ$ das Innere und \bar{A} den Abschluss von A in X bezeichnen.

Aufgabe 4. Sei A eine Teilmenge des topologischen Raums X . Der Rand ∂A ist die Menge der Punkte x in X , für die jede offene Menge U von X mit $x \in U$ sowohl mit A als auch mit $X \setminus A$ einen nicht-leeren Schnitt haben. Beweise oder widerlege:

- (a) ∂A ist abgeschlossen,
- (b) $\bar{A} = A \cup \partial A$,
- (c) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A}$,
- (d) A abgeschlossen $\iff \partial A = \emptyset$.

Abgabe am 13.4. in der Vorlesung oder online